

6. Куценко О.І. Проектування системи управління якістю у вищих навчальних закладах: навч. посібник / О.І. Куценко, Н.В. Ротань, О.Є. Яковенко. – Одеса: Наука і техніка, 2017. – 244 с.

7. Липов В. Комплиментарна зумовленість інституціональних систем: реформування вищої освіти в Україні / В. Липов // Вища школа. – 2018. – №4. – С. 23-48.

8. Соколов М. Как становятся профессорами: академические карьеры, рынки и власть в пяти странах / М. Соколов. – М.: НЛЮ, 2015. – 832 с.

9. Захарченко В.И. Развитие высшего частного образования в Польше / В.И. Захарченко // Ринкова економіка: сучасна теорія та практика управління. – 2009. – Т.12. – Вип 26. 4.1. – С. 139-147.

10. Фініков Т.В. Сучасна вища освіта: світові тенденції і Україна / Т.В. Фініков. – К.: Таксон, 2002. – 176 с.

11. Большой экономический словарь / Под ред. А.Н. Азрилияна. – 5е изд. – М.: ННЭ, 2002. – 1280 с.

**Summary.** *Based on the generalization of world experience, a number of approaches to the formation of quality education management systems are proposed. There are five groups of management depending on the type of education in education, as well as the five levels of educational management in the state. The advantage is given to the use of programmatic and system-oriented approaches to the quality management of the educational process at the university.*

**Key words:** *education, quality, management, concept, methodology, analysis, approach, university.*

## **ПРОБЛЕМИ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕТИЧНИХ ПОЛОЖЕНЬ РІВНОСИЛЬНОСТІ РІВНЯНЬ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ**

**М. Лапиш**

*викладач*

*Ізмаїльський державний гуманітарний університет*

**Анотація.** *У статті осмислено роль математичної освіти як основи наукового пізнання у практичній діяльності людини. Звернено увагу на те, що рівень математичної освіти значною мірою залежить від постійного і системного підвищення професійного рівня педагогічних працівників. Розглянуто деякі аспекти вивчення теми «Рівносильність рівнянь».*

**Ключові слова:** *математична освіта, математична компетентність, розв'язування рівнянь, рівносильні рівняння, тотожні перетворення.*

Вимоги сьогодення та швидкий розвиток ІТ технологій потребують відповідного розвитку математичних знань. Тому, згідно ст. 12 Закону України «Про освіту», математична компетентність є третьою в переліку ключових

компетентностей [1]. Крім того, з точки зору Європейської комісії в галузі освіти, як зазначено у «The Key Competences for Lifelong Learning – A European Framework», ключовими компетентностями є математична та базові компетенції в науці і технологіях, а також цифрові компетентності [2]. Тому Державним стандартом України значна роль сьогодні відводиться математичній освіті.

Математика у всі часи відігравала величезну роль у людській практиці, а зараз стала необхідним знаряддям пізнання, розрахунків та прогнозування, що в свою чергу передбачає підвищення математичної підготовки учнів, яка є інструментом дослідження багатьох сфер теоретичної та практичної діяльності.

Досвід показує, що відповідне підвищення ролі математичних методів під час вивчення матеріалу багатьох предметів, створило зручну основу для координації шкільної освіти не тільки за методами навчання, а й з раціональним використанням математичних знань при вивченні інших навчальних предметів, насамперед через те, що сфера застосування математики постійно розширюється.

Л.М. Фрідман, зазначає, що «...процес вивчення математики сприяє розвитку в людини важливих якостей, а сама математика виступає основою наукового пізнання» [7, с. 16]. На жаль, за результатами незалежного зовнішнього оцінювання, рівень математичної підготовки теперішніх випускників занадто низький.

З метою поліпшення якості шкільної математичної освіти в поточному навчальному році для учнів 4-х та 9-х класів державна підсумкова атестація з математики є обов'язковою. Іспити відбуватимуться письмово у закладах освіти, в яких навчаються учні. Тест зовнішнього незалежного оцінювання з математики з 2021 року стане обов'язковим для усіх учнів, які здобуватимуть повну загальну середню освіту.

Слід зазначити, що якість математичної освіти в навчальних закладах значною мірою залежить від постійного і системного підвищення професійного рівня педагогічних працівників, бо значна кількість випускників проходить підготовку до ЗНО під керівництвом шкільного вчителя.

Алгебра – це наука дедуктивна, чітко обґрунтована, яка виникла із набору корисних правил, спостережень, насамперед це наука про розв'язування рівнянь. В шкільному курсі математики розв'язуванню рівнянь надається дуже важливе значення. Це пояснюється насамперед тим, що багато геометричних задач та задач з таких предметів, як фізика, хімія, біологія розв'язується за їх допомогою. При цьому другим розділом Програми зовнішнього незалежного оцінювання з математики є «Рівняння, нерівності та їхні системи», а одне із завдань ЗНО полягає у тому, щоб оцінити знання та вміння учасників досліджувати та розв'язувати рівняння.

Наш досвід свідчить про те, що учні роблять багато помилок при розв'язанні рівнянь, а відповідно й нерівностей та їх систем. Розглянемо деякі аспекти вивчення теми «Рівносильність рівнянь».

Введення поняття рівносильності тверджень дозволяє розглянути питання рівносильності рівнянь з більш загальних позицій. Ми можемо говорити про

рівносильність одного рівняння іншому, про рівносильність рівняння деякій системі, про рівносильність рівняння складному реченню, складеному за допомогою сполучника «або», про рівносильність рівняння нерівності.

Наприклад рівняння  $(x^2+11)(x-17)=0$  рівносильне рівнянню  $x-17=0$ , рівняння  $(5x-9)(x+6)=0$  рівносильне реченню « $5x-9=0$  або  $x+6=0$ », рівняння  $|x|=x$  рівносильне нерівності  $x \geq 0$ .

Відомо, що при розв'язанні будь-якого рівняння, його, як правило перетворюють, послідовно замінюючи іншими, більш простими. Цей процес заміни продовжують до тих пір, поки не отримають рівняння, рішення якого можна знайти одним з відомих способів. Але, для того щоб ці рішення були рішеннями заданого рівняння необхідно, щоб у процесі перетворень були отримані рівносильні рівняння, тобто рівняння множини рішень яких співпадають.

Властивості рівнянь з однією змінною відомі учням ще з 6-го класу, а властивості рівнянь з двома змінними вивчаються в курсі алгебри 7-го класу [5].

За означенням, що надано в підручнику алгебри 8-го класу (автори А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір) «Два рівняння називаються рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені, або кожне з рівнянь не має коренів» [6, с. 46].

Наприклад, рівняння  $(x+1)^2=25$  та  $(x-4)(x+6)=0$  рівносильні на множині дійсних чисел, тому що множина рішень першого рівняння  $\{-6; 4\}$  та множина рішень другого рівняння  $\{4; -6\}$  рівні. Рівняння  $5x=15$  і  $(x+8)(x-3)=0$  не є рівносильними, оскільки коренем першого з них є число 3, а друге має ще один корінь, що дорівнює  $-8$ , який не є коренем першого рівняння.

Значення рівносильності, у підручнику алгебри для 8-го класу (автори А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір), ілюструється на прикладі розв'язання рівняння  $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0$  [6]. Це рівняння у ході розв'язання, замінюється системою, що рівносильна даному рівнянню з використанням умови рівності дробу нулю. Так у підручнику розглядається ще декілька прикладів більш високого рівня складності, розв'язання яких надано шляхом подання лівої частини рівняння у вигляді раціонального дробу.

О. С. Істер розглядає тотожні перетворення спочатку на прикладі розв'язання більш простого рівняння  $\frac{x}{x-2}=3$ , а вже потім на прикладі складніших [4, с. 58]. При цьому, надано приклади розв'язання рівнянь різними способами, з поданням короткої схеми кожного з них, а саме: використання умови рівності дробу нулю, використання основної властивості пропорції, застосування методу множення обох частин рівняння на спільний знаменник дробу.

Зауважимо, що при поясненні матеріалу доцільно ще раз зупинитися на змісті поняття слідування коли ми говоримо, наприклад, що із рівняння  $5x+3=28$  слідує рівняння  $5x=28-3$ , то маємо на увазі наступне: якщо при деякому значенні  $x$  рівняння  $5x+3=28$  перетворюється у вірну рівність, то при цьому ж значенні  $x$

рівняння  $5x = 28 - 3$  також перетворюється у вірну рівність. Стверджувати це ми можемо на підставі рівності між числами: якщо  $a = b$ , то  $a + c = b + c$ .

Теореми про рівносильність у 8-му класі не вивчаються, однак в кожному конкретному випадку учні можуть обґрунтувати рівносильність даного та отриманого рівняння, посилаючись на властивості відношення рівності, правила тотожних перетворень та транзитивність відношення рівносильності між реченням з однаковими змінними.

Зазначимо, що при розв'язанні рівнянь частіше використовуються не самі теореми, а наслідки з них. Тому у підручнику 8-го класу (автори А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір) наслідки теорем, використовуючи поняття «рівносильні рівняння», подано у вигляді властивості рівнянь з однією змінною, які сформульовано так:

1. Якщо до обох частин рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

2. Якщо який-небудь доданок (числовий вираз, або вираз зі змінною) перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому знак доданку на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

3. Якщо обидві частини рівняння помножити (або поділити) на одне й те саме число, відмінне від нуля, то отримаємо рівняння, рівносильне даному [6, с. 46].

Слід зазначити, що властивості, які перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння в підручнику О. С. Істер дещо відрізняються. Першу властивість сформульовано таким чином: «Якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному» [4, с. 58].

Розглянемо розв'язання рівняння та визначимо, які теоретичні положення при цьому були використані. Покрокове розв'язання рівняння представлено у вигляді алгоритмічної схеми на Мал. 1., яке може бути використане вчителем при вивченні даної теми.

Розв'язання рівняння: $1 - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$			
Крок	Хід розв'язання	Один з варіантів запису в зошті	Використані теоретичні положення
1.	Приведемо вирази, які знаходяться в лівій і правій частині рівняння до спільного знаменника	$\frac{6 - 2x}{6} = \frac{x}{6}$	Виконали тотожні перетворення виразів в лівій частині рівняння, отримали рівняння, рівносильне даному.
2.	Відкинемо спільний знаменник	$6 - 2x = x$	Застосували властивість 3.: помножили на 6 обидві частини рівняння, отримали рівняння, рівносильне даному, а значить й вихідному.
3.	Вираз $-2x$ перенесемо в праву частину рівняння	$6 = 2x + x$	Скористалися властивістю 1.: додали до обох частин рівняння вираз $2x$ , визначений для усіх дійсних чисел, отримали рівняння, рівносильне попередньому, а відповідно й вихідному.
4.	Привели подібні члени в правій частині рівняння	$6 = 3x$	Виконали тотожні перетворення, отримали рівняння, рівносильне попередньому, а відповідно й вихідному.
5.	Розділили обидві частини рівняння на 3	$x = 2$	Скористалися властивістю 3.: помножили обидві частини рівняння на $\frac{1}{3}$ , отримали рівняння, рівносильне попередньому, а відповідно й вихідному.
6.	Зробили висновок	Відповідь: 2.	

Мал. 1. Алгоритмічна схема розв'язання рівняння (власна розробка автора)

Як же все-таки правильно розв'язати рівняння? Один із варіантів розв'язання рівняння наведено на Мал. 2.

Розв'язання рівняння: $x(x+7) = 9x$			
Крок	Хід розв'язання	Запис у зошиті	Використані теоретичні положення
1.	Вираз $9x$ перенесемо з правої в ліву частину рівняння	$x(x+7) - 9x = 0$	Скористалися властивістю 1 та 2: перенесли з однієї частини рівняння в другу вираз $2x$ , змінивши при цьому знак виразу на протилежний, отримали рівняння, рівносильне даному.
2.	Винесемо в лівій частині рівняння за дужки $x$ і приведемо подібні члени	$x(x+7-9) = 0$	Виконали тотожні перетворення, які не порушили рівносильності рівняння, отримали рівняння, рівносильне попередньому, а відповідно й вихідному.
3.	Враховуємо, що добуток двох множників дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю	$x(x-2) = 0$	Скористалися умовою рівності нулю добутку декількох множників, отримали сукупність рівнянь, рівносильних попередньому, а відповідно й вихідному рівнянню.
4.	Розглянемо сукупність рівнянь. Розв'яжемо друге рівняння: число $-2$ перенесемо в праву частину другого рівняння	$x = 0$ або $x-2 = 0$	Скористалися властивістю 1: додали до обох частин другого рівняння число $2$ , отримали рівняння, рівносильне попередньому.
5.	Отримаємо	$x = 0$ або $x = 2$	Отримали сукупність рівнянь, рівносильних попередній системі, а відповідно й вихідному рівнянню.
6.	Зробимо висновок	Відповідь: $0$ і $2$	

**Мал. 2.** Розв'язання рівняння з використанням теоретичних положень (власна розробка автора)

Таким чином множина розв'язків даного рівняння складається з двох чисел  $0$  і  $2$ , тобто  $\{0; 2\}$ .

Слід зауважити, що невиконання умов вищезазначених властивостей може призвести не тільки до втрати коренів рівняння, а й до появи так названих сторонніх коренів.

Розглянемо на прикладі розв'язання рівняння, що має сторонні корені. Розв'яжемо рівняння  $\frac{15x-45}{(x-3)(x+7)} = 0$ . Ми звільняємося від знаменника, шляхом множення обох частин рівняння на  $(x-3)(x+7)$ . Отримуємо  $15x-45 = 0$ . Звідки маємо  $x = 3$ . Водночас, при  $x = 3$  знаменник дроби  $\frac{15x-45}{(x-3)(x+7)}$  перетворюється в нуль, й тому  $x = 3$  не може бути коренем вихідного рівняння, тобто  $x = 3$  виявляється стороннім коренем.

Отже, якщо при розв'язанні рівняння його замінують наслідком (а не рівносильним рівнянням) то необхідно знайти усі корені рівняння-наслідку, а потім їх перевірити, підставивши в початкове рівняння. Сторонні корені відкидають.

Слід зауважити, що поява сторонніх коренів, менш «небезпечно» явище, ніж їх втрата. Ось чому при розв'язанні рівнянь необхідно в першу чергу дуже уважно відстежувати застосування теорем рівносильності.

Якщо розглядати дане питання в початковому курсі математики де теоретичною основою виступає взаємозв'язок між компонентами і результатами дій. Тобто розв'язання рівняння  $(15 \cdot x) : 25 = 3$  обґрунтовується наступним чином.

Оскільки невідоме число знаходиться в діленому, то для того щоб знайти ділене, треба дільник помножити на частку. Отже  $15 \cdot x = 3 \cdot 25$ , або  $15 \cdot x = 75$ . Щоб знайти невідомий множник, необхідно добуток поділити на відомий множник, а саме  $x = 75 : 15$ , або  $x = 5$ . Отже, розв'язком даного рівняння є число 5.

Отже, використання різних методів при розв'язанні рівнянь та правильне застосування теоретичних положень їх рівносильності сприятимуть підвищенню рівня шкільної математичної освіти, а через неї й відповідність отриманих випускниками загальних знань і ключових компетентностей.

Таким чином, для гарної і повноцінної підготовки майбутніх випускників загальноосвітніх навчальних закладів, учителю необхідно враховувати багато аспектів, у тому числі й ті, що виходять за межі деяких шкільних підручників. Водночас, застосування такого підходу допоможе передбачити і своєчасно усувати можливі помилки, оптимізувати процес навчання математики, а також підвищити рівень математичної освіти.

1. Закон України «Про освіту» (Відомості Верховної Ради (ВВР), 2017, № 38-39, ст.380) : Редакція від 19.01.2019. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19>

2. The Key Competences for Lifelong Learning – A European Framework is an annex of a Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning that was published in the Official Journal of the European Union on 30 December 2006/L394. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/site/en/oj/2006/l\\_394/l\\_39420061230en00100018.pdf](http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/site/en/oj/2006/l_394/l_39420061230en00100018.pdf)

3. Істер О.С. Алгебра : підр. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. С. Істер. – Київ : Генеза, 2015. – 256 с.

4. Істер О.С. Алгебра : підр. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. С. Істер. – Київ : Генеза, 2016. – 270 с.

5. Мерзляк А.Г. Алгебра : підр. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків : Гімназія, 2015. – 256 с.

6. Мерзляк А.Г. Алгебра : підр. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 240 с.

7. Фридман Л.М. Учитесь учиться математике: Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1985. – С.7-16.

*Summary.* The article interprets the role of mathematics education as the basis of scientific knowledge in practical human activity. Attention is drawn to the fact that the level of mathematics education largely depends on the constant and systematic improvement of the professional level of teachers. Some aspects of studying the topic «Equivalence of equations» are considered.

**Key words:** mathematical education, mathematical competence, solution of equations, equivalent equations, identical transformations.